INTUIÇÃO NA MATEMÁTICA

Sobre a Função da Variação Eidética nas Provas Matemáticas

Dieter Lohmar
Universidade de Colónia

A linha central de investigação na fenomenologia é dedicada à intuição e, desde o início, consistiu não apenas numa investigação da intuição sensível, mas também da intuição no conhecimento, ou, como Husserl lhe chama, intuição categorial. A perceção sensível preenche as nossas intenções de objetos reais e mundanos, mas a intuição categorial é a maneira como intuímos objetos de uma ordem mais elevada, tais como estados-de-coisas. A maior parte das formas comuns de conhecimento pode ser reconduzida à sensibilidade, no entanto, até nas formas mais simples de conhecimento estão também presentes elementos que têm, na obtenção de uma intuição, uma relação apenas periférica com a sensibilidade.

Nas formas de conhecimento mais elevadas, particularmente nas ciências formais, a sensibilidade tem um papel insignificante. No entanto, podemos adquirir intuições e evidências em contextos formais. Até podemos adquirir evidências apodíticas, que são a forma mais elevada de evidência. Implica que os estado-de-coisas dados nessa evidência são verdadeiros e não poderiam ser de outro modo. Nesta minha contribuição, gostaria de fazer algumas investigações detalhadas sobre o carácter especial do processo a partir do qual a matemática permite evidências apodíticas.

Se tentarmos aceder às evidências apodíticas a partir da perspetiva do pensamento husserliano, este tipo de evidência está estreitamente relacionado com o método eidético, a chamada *Wesensschau*. A intuição de essências é um tipo especial de intuição categorial e é caracterizado por uma evidência apodítica. Esta posição não se altera durante todo o desenvolvimento da fenomenologia husserliana. Mas não é fácil compreender como o método eidético é usado no âmbito das provas matemáticas e como estas evidências são adquiridas em contextos formais.

O principal interesse da minha investigação é, primeiro, delinear o sistema abstrato da teoria fenomenológica do conhecimento e, em segundo lugar, fornecer uma descrição concreta do tipo de intuição em Matemática e da sua evidência particular.[1] Vou, portanto, analisar fenomenologicamente alguns passos intuitivos em provas matemáticas. A minha intenção ao fazê-lo não é permanecer no nível mais elevado do sistema geral teórico, mas fornecer uma descrição detalhada do que estamos realmente a fazer com as provas. Este simples trabalho descritivo é o verdadeiro ponto forte da Fenomenologia husserliana. Husserl caracterizou-o com a frase: não devemos começar com as notas grandes mas com as moedas pequenas!

A minha apresentação começa com algumas reflexões básicas sobre a origem e tipo de intuição nas ciências formais e na Matemática. Vou esquematizar alguns aspetos essenciais da teoria fenomenológica do conhecimento em geral e da Matemática em particular. Na segunda parte, vou abordar a questão de como adquirimos evidências apodíticas na análise fenomenológica da consciência, assim como na Matemática, que consiste em visões necessárias ou *a priori*. A posição que tentarei estabelecer é bem conhecida: evidências apodíticas na Matemática resultam do uso do método eidético em provas matemáticas (*Wesensschau*). A segunda parte consiste em três partes dedicadas ao uso da eidética para objetos reais, na Matemática material e na Matemática axiomática formal.

1. Alguns aspetos básicos da teoria do conhecimento de Husserl

Deixem-me começar por esquematizar brevemente as características básicas da teoria do conhecimento de Husserl. Quero, deste modo, clarificar as principais razões por que podemos ter conhecimento não apenas de coisas reais, mas também de objetividades num contexto axiomático.

A Fenomenologia começa a análise do conhecimento examinando a doação sensível de objetos e a atividade de pensamento. Na perceção, o que é dado sensivelmente é apercebido, isto é, interpretado como um objeto através de um ato sintético. Neste ato sintético, o objeto intencionado é intuído como

---

[1] A teoria de Husserl da intuição categorial é desenvolvida no meu "Husserl's Concept of Categorical Intuition" (em: *Hundred Years of Phenomenology*, ed. D. Zahavi F. Stjernfelt. Dordrecht, 2002, 125-145), e numa investigação mais orientada para as questões das ciências formais: *How are Formal Sciences Possible?* (em: *The New Yearbook for Phenomenology*, VI, 2006: 109-126).

"qualquer coisa". E sou capaz de identificar este "qualquer coisa" como sendo o mesmo em atos seguintes de perceção e de conhecimento.

Devido ao fato de o carácter da aperceção ser já um tipo de interpretação, a perceção sensível de um objeto excede o material atualmente dado pelos nossos sentidos. A sensibilidade só nos dá uma espécie de base material para a nossa apreensão, mas permanece um tipo de "matéria-prima" que deve ser tratada da forma correta. Um objeto é dado em evidência quando não apenas o intencionamos de modo vazio, sem a ajuda da sensibilidade, mas quando a sensibilidade preenche (confirma como verdadeiro) o que intencionamos. Mas este preenchimento é um processo ativo, sintético, de coleção e combinação da matéria sensível, que resulta numa representação sensível do objeto.

Vamos ver isto melhor: Que preenche as minhas intenções, nas intuições de tipo quotidiano como "este livro é verde"? Inegavelmente, a sensibilidade tem um papel decisivo no preenchimento de tais intuições, mas, como veremos, não consegue preencher esta intenção completamente. Nas suas análises de atos cognitivos juntamente com a sensibilidade, Husserl encontrou outra fonte de intuição no que ele chama "síntese de coincidência". Para melhor compreender isto, consideremos o exemplo do livro verde: quando vejo um livro verde, há várias fases envolvidas no processo. Na primeira fase da perceção, ou seja, na "perceção de conjunto", o livro é dado no seu todo. Nesta visão de conjunto, todos os elementos de sentido envolvidos neste objeto são intencionados implicitamente – mas não são explicitamente observados. Na segunda fase, viro a minha atenção para a cor particular do livro, embora ainda percecionando o livro como um todo. Agora perceciono o livro com a ajuda da "sua cor". Mais: na transição entre estes dois atos, ou seja, passando da visão de conjunto para a intenção focada na çor do livro, surge uma "síntese de coincidência" dos sentidos intencionados dos dois atos.

Isto significa: a intenção parcial, dirigida para o momento de ser verde, que foi apenas implicitamente intencionado na visão de conjunto, "coincide" com a intenção especial da cor verde, que agora recebe uma atenção explicitamente direcionada. Compreendemos que ambas as intenções intencionam "o mesmo", mas diferem no seu carácter. Uma destas intenções é implícita, desapercebida, e feita de forma casual; a outra é ativa, deliberada, e explicitamente direcionada para um único elemento sensível do todo. No entanto, ainda somos capazes de reconhecer que o seu objeto é "o mesmo". Esta capacidade da mente para reconhecer semelhança de sentido em diferentes modos de atividade é chamada por Husserl "síntese de coincidência".

Sínteses de coincidência são dadas passivamente na atividade da consciência, isto é, elas ou ocorrem ou não, e não podemos influenciar a sua ocorrência. Como no caso do livro verde, a coincidência depende mais do objeto dado sensivelmente do que da nossa atividade. A sensibilidade, em conjunto com esta "síntese de coincidência", ocorrendo no quadro de atividade categorial, forma a base intuitiva das nossas intuições quotidianas. Deste modo, até aqui, o fundamento da intuição não é apenas a sensibilidade, mas também algo mais, que remete para a nossa atividade pensante.

Poder-se-ia objetar que, na visão de conjunto inicial, nós, de alguma forma, já "sabíamos" que o livro era verde porque o intencionámos "enquanto verde". Este conhecimento implícito e escondido só se poderia tornar explícito e intuitivamente presente ao ser iluminado na segunda fase da intuição categorial. Depois, com a mediação das sínteses de coincidência, é interpretado como um estado-de-coisas existente. É precisamente esta passagem que diferencia entre as características observadas apenas de passagem e aquelas que são explicitamente reconhecidas.

Até aqui, tenho sublinhado a função das "sínteses de coincidência", que vão mais além que a sensibilidade nas intuições quotidianas, mantendo em vista que o meu objetivo era investigar a origem da intuição na Matemática. O conhecimento matemático é conhecimento genuíno, com a sua própria fonte de intuição, e, na maior parte dos casos, é independente da sensibilidade. Mas agora podemos ver que isto não é assim tão excecional, porque sabemos que, no conhecimento quotidiano, também temos tipos de conhecimento que são, em grande parte, independentes de intuição sensível. Na minha opinião, o mesmo é verdade das conclusões que tiramos de conhecimentos anteriores, em atos cognitivos quotidianos.

Mas, então, o que dizer acerca da Matemática Axiomática Formal? Aqui é possível começar num contexto onde há apenas proposições "assumidas como válidas". Nestes contextos, nunca avançamos para além dos juízos que sejam derivados das tais proposições pressupostas. Mas isto só tem que ver com juízos acerca de propriedades de objetos. Podemos, no entanto, ir mais além. Por exemplo, se considerarmos as relações de "dedutibilidade" entre proposições pressupostas: nomeadamente, se considerarmos a questão de saber se uma proposição é dedutível de um conjunto de axiomas, podemos chegar a um conhecimento válido, e este conhecimento tem o nível de evidência mais elevado possível, isto é, a evidência apodítica.

Mas antes de avançar para uma investigação mais detalhada acerca deste tipo de evidência, permitam-me sublinhar a semelhança entre conhecimento comum e conhecimento matemático: ambos são exemplos de conhecimento e ambos são tipos de conhecimento que não são baseados apenas na sensibilidade, porque, também no caso do conhecimento quotidiano, as sínteses de coincidência entre intenções parciais têm uma função de preenchimento. Mas também há uma diferença importante entre eles: no conhecimento quotidiano, as intenções são muito mais complexas que na Matemática. Coisas reais têm sempre diversos aspetos, tais como a cor, forma, propriedades materiais, estão enquadradas em relações causais, têm aspetos estéticos e estão enquadradas por uma história objetiva, etc. Na Matemática, estamos orientados para números em geral, operações em geral, conjuntos em geral, etc.[2] Todos eles são objetos que se baseiam em operações simples da mente, criando novos objetos e novos tipos de evidências para estes objetos. E todos estes objetos implicam apenas algumas intenções parciais (não têm cor, relações causais, história objetiva...). Por conseguinte, as sínteses de coincidência que surgem neste contexto formalmente definido são, também, muito mais facilmente estruturáveis e mais distintas. Isto é devido ao fato de que as nuvens de intenções horizontais, que normalmente acompanham as intenções de objetos comuns, não obscurecerem as sínteses. Resulta que a evidência nas ciências formais é muito mais clara. No entanto, esta diferença não nos garante que a verdade nas ciências formais seja necessária e que a sua evidência seja apodítica.

2. O método de ver essências em provas matemáticas

2.a. *O método de visão da essência (eidético) usado para objetos reais*

O método eidético de ver essências de Husserl afirma que os seus resultados não são restritos a questões factuais empíricas, mas que também dizem respeito a estruturas universais e *a priori*, leis necessárias, válidas para todos os casos de atos de consciência, tanto para os factuais e presentes como para os possíveis e futuros.

A teoria de Husserl sobre ver essências é desenvolvida no contexto da sua teoria do conhecimento, isto é, na Sexta Investigação Lógica. Ver essências é analisado como um caso especial de aquisição de conhecimento. No início, é uma capacidade humana natural para compreender o que é semelhante em objetos diferentes tais como árvores, seres humanos e limões. Mas esta simples capacidade mental pode ser metodicamente trabalhada e, no fim, torna-se um método básico de análise fenomenológica da mente humana.

Na primeira linha, a Fenomenologia procura conhecimento *a priori* e necessário sobre as estruturas universais da consciência, isto é, sobre as estruturas independentes das questões de fato. Com a ajuda do método eidético, também podemos ter conhecimento *a priori de* outras regiões do ser, que Husserl chama ontologias regionais, como sons, cores, etc., assim como

---

[2] Para uma investigação mais detalhada acerca dos diferentes tipos de objetos matemáticos, cf. a minha *Phänomenologie der Mathematik. Elemente einer phänomenologischen Aufklärung der mathematischen Erkenntnis nach Husserl*". Phaenonenologica, 114. Dordrecht: Kluwer, 1989 e *How Are Formal Sciences Possible?* (*ibid.*).

Geometria, Aritmética e outras áreas da Matemática. O ato de ver essências é chamado *Wesenschau, ideierende Abstraktion* ou *Anschauung des Allgemeinen*. Está fundado sobre, e começa com a perceção simples de objetos individuais, de uma forma semelhante a todas as outras formas elementares de conhecimento. Mas ver essências também exige um desempenho ativo da mente, antes de mais, a variação do exemplo que serve de ponto de partida.

A palavra *Wesenschau* (ver essências) é, na minha opinião, uma escolha terminológica muito irritante. Sugere que a Fenomenologia é uma variante da teoria platónica das ideias. Este não é certamente o caso porque Husserl nunca hipostasia ou substancializa os objetos do método eidético: definitivamente, não são objetos residindo numa outra "realidade" mais elevada, como são em Platão. Husserl não compreende as essências como sendo "mais reais" que os objetos de perceção sensível.[3] Para Husserl, o mundo do quotidiano é a única realidade. No entanto, objetos matemáticos e todos os outros objetos ideais são objetos de pensamento e também podemos ter intuições acerca deles. Para que possamos adquirir conhecimento sobre estes objetos ideais, eles têm de participar de algum modo na realidade única, pelo menos quando os referimos com a ajuda de sinais (sensíveis). Por conseguinte, Husserl pressupõe os graus de realidade de uma forma completamente oposta à de Platão: as essências estão dependentes do mundo real e não têm realidade independente.

No processo de ver essências encontramos exatamente os mesmos elementos que nos casos simples de cognição. A intuição de traços idênticos em objetos diferentes (essências, universais) é expressa através de um nome universal. Por exemplo, ter uma intuição de "verde" só é possível se fizermos suceder uma série de objetos verdes, quer na imaginação, quer na perceção.[4] A intuitividade da minha intenção do que é comum em todos os casos, ou seja, do universal, é devida às sínteses de coincidência que ocorrem em todos os casos.

Todos os atos de intuição categorial são caracteristicamente ternários: perceção simples do objeto como um todo, concentração focada num aspeto, síntese categorial. Ver essências tem exatamente esta estrutura ternária: começa com uma visão de conjunto no exemplo inicial, e a segunda fase de concentração focada num aspeto tem uma multiplicidade de objetos diferentes,

---

[3] Para a demarcação de Husserl do Platonismo, cf. o meu comentário sobre "Formal and Transcendental Logic" (em D. Lohmar, *Edmund Husserls Formale und transzendentale Logik*. Werkinterpretation. Damstadt: Wissenschaftliche Buchgesellschaft Damstadt, 2000, 187, 215f.) e "On the relation of mathematical objects to time. Are mathematical objects timeless, overtemporal or omnitemporal?" (*Journal of Indian Council of Philosophical Research*, X (1993): 73-87).

[4] Cf. Hua XIX, 111-115, 176 sgs., 225 sgs., 690-693.

todos eles sendo variações ou modificações do exemplo inicial. Indo através destes atos que resultam da variação do exemplo inicial, estamos dirigidos para os aspetos idênticos e aí ocorre a síntese de coincidência. Deste modo, a segunda fase consiste em todas as variantes possíveis do exemplo inicial e a terceira fase consiste em interpretar (ou aperceber) a síntese de coincidência especial como o representante intuitivo do que é invariável em todos os casos possíveis.

Se compreendermos que encontramos o mesmo elemento em todas as variações possíveis do objeto (em perceção ou imaginação), então poderemos ter a certeza que também estará presente em todos os casos futuros; portanto, esta visão é necessária e *a priori,* no sentido especial do método eidético.[5] Por exemplo, todos os objetos com extensão têm necessariamente uma certa cor, todos os sons têm uma certa intensidade e duração, etc.

No ato de abstração eidética, apreendemos, como doação intuitiva do universal, a síntese especial de coincidência que tem lugar quando percorremos todas as variantes possíveis. Através deste método de evidenciar o modo de doação intuitivo, o universal torna-se um objeto no sentido pleno, caracterizado pelas seguintes possibilidades: intenção vazia, identificação e intuição preenchida.

Vamos agora dirigir a nossa atenção para os atos de variação do exemplo inicial. Husserl só compreende o papel central da variação depois da publicação das *Investigações Lógicas* (1900).[6] Nos atos de variação, podem e têm de ocorrer atos imaginativos que de algum modo variam o exemplo inicial. Esta fase necessária de variação permite-nos principalmente chegar à essência de um objeto, com base num único objeto intuitivamente dado, através da variação deste exemplo inicial. Mas temos, de algum modo, de conseguir todas as variantes possíveis – e é precisamente isto que parece difícil.

Será mesmo necessário realizar *infinitos* atos de variação para chegar à específica generalidade dos universais? Husserl só levanta e só responde à esta questão específica na sua teoria genética tardia da variação eidética, que pode

---

[5] Husserl indica a diferença crucial do sentido de *a priori* em Kant e no seu próprio trabalho numa nota de rodapé em *FTL* (cf. Hua XVII, 255, nota 1).

[6] É muito difícil descobrir as fontes históricas da ideia de Husserl sobre variação na tradição filosófica. Não só Brentano e Bolzano, mas também Berkeley e Hume, são possíveis referências, mas não é este o meu tema. Também podemos considerar algumas teorias matemáticas como fontes possíveis, como a abordagem de Klein para caracterizar tipos de Geometria por grupos de transformação que deixam as propriedades essenciais dos objetos inalteradas. Bernold Picker (em: "Die Bedeutung der Mathematik fur die Philosophie Edmund Husserls". *Philosophia Naturalis*, 7, 1961: 266-355) e Richard Tieszen (em: "Free Variation and the Intuition of Geometric Essences: Some Reflections on Phenomenology and Modern Geometry". *Philosophy and Phenomenological Research*, LXX, 1: 153-173) forneceram pistas detalhadas a respeito da sua fonte de inspiração.

ser encontrada na lição *Psicologia Fenomenológica* (1925) e em *Experiência e Juízo*.

Apesar de tudo, a função da imaginação já tinha sido discutida anteriormente em muitos outros trabalhos. Na *Ideias I* (1913) e na *Psicologia Fenomenológica* (1925), Husserl aponta explicitamente a necessidade e prioridade da variação imaginativa e "livre". Isto está em oposição à apresentação da sua teoria de ver essências nas *Investigações Lógicas*, onde é deixada por resolver a questão sobre se os atos de variação são perceções ou atos de imaginação intuitivos.[7] Nas *Ideias I*, ele afirma claramente que também é possível ver essências com base nas recordações e imaginação.[8] Mas até nas *Ideias I* ele insiste que a imaginação livre, em comparação com a perceção, é privilegiada no contexto de ver essências.[9] O uso da variação imaginativa é necessário neste contexto.[10] A ideia de um estatuto privilegiado da imaginação neste contexto leva Husserl à afirmação que a ficção é o instrumento mais importante da intuição em fenomenologia.[11]

Na lição *Psicologia Fenomenológica,* Husserl desenvolve a forma final do seu método eidético como variação eidética. Seguindo a sua última versão, começamos o processo de variação com um qualquer objeto intuitivamente percecionado ou imaginado, e depois variamos este objeto na sua função de exemplo-guia na fantasia.[12] Neste processo ocorre uma espécie de sobreposição, no sentido das várias variações entre as variações singulares.[13]

---

[7] Sobre a função da fantasia livre na variação eidética cf. Hua III/1, 146 sgs., Hua XVII, 206, 254 sgs., *EU*, 410 sgs. e E. Ströker, "Husserls Evidezprinzip. Sinn und Grenzen einer methodischen Norm der Phänomenologie aus Wissenschaft" (*Zeitschrift fur Philosophische Forschung*, 32, 1978: 21 sgs.). Th. Seebohm propõe que há um tipo de variação na fantasia já presente nas *Investigações Lógicas*, cf. a sua contribuição "Kategorial Anchauung" (*Phänomenologische Forschungen*, 23, 1990: 14 sgs.). Sobre o papel da variação em fantasia cf. também o meu *Einleitung* para Studienausgabe da *Phänomenologische Psychologie* de Husserl (Hamburg: Felix Meiner, 2003, IX-XLI). Começamos a variação na imaginação com uma ideia vaga do objeto inicial sobre o qual vamos fazer todas as possíveis variações. No princípio, a nossa ideia da cor verde é vaga, mas podemos usá-la para criar variações de objectos verdes e nos passos seguintes do método eidético somos capazes de ter uma intuição do objecto geral.

[8] Husserl escreveu que a variação pode ser executada "auf Grund bloβer Vergegenwärtigung von exemplarischen Einzelheiten" (Hua III/I, 145 sgs.)

[9] Husserl escreveu: "freie Phantasie [hat] eine Vorzugsstelhung gegenüber der Wahmehung", (Hua III/I, 147).

[10] Cf. Hua III/1, 148.

[11] Ele diz: "daβ die 'Fiktion' das Lebenselement der Phänomenologie, wie aller eideitischen Wissenschaft, ausmacht, daβ Fiktion die Quelle ist, aus der die Erkenntnis, 'ewigen Wahrweiten' ihre Nahrung zieht" (Hua III/1, 148).

[12] Cf. Hua IX, 76.

[13] Husserl fala de "überschiebender Deckung" (Hua IX, 77).

Neste sobrepor-se entre todas as variações possíveis, experienciamos um conteúdo específico que preenche o ato de intentar as características comuns invariáveis de todas as variantes possíveis. Realizamos o ato de intuição categorial, que, neste caso, é um ato de ver essências, com base nesta síntese de coincidência. Este tipo especial de conteúdo preenche intuitivamente a intenção da característica comum invariante.

Mas podemos justificar a afirmação de verdadeira universalidade através deste ato? Husserl pensa que uma tal justificação pode ser encontrada devido ao carácter especial da variação imaginativa no processo de variação eidética. Em todas as variações temos de acrescentar um elemento importante de sentido: eu posso livremente continuar esta variação mais e mais.[14] Este é o novo elemento decisivo na especificação do método eidético enquanto variação eidética. Temos de estar conscientes que estamos a realizar uma variação livre e em princípio ilimitada a cada passo da variação atual. Numa perspetiva idealizante, podemos interpretar isto como uma "variação infinita".[15]

Encontramos, assim, algo como um passo idealizante em cada ato pleno de intuição eidética. E isto não é apenas verdade para objetos matemáticos, mas também para objetos comuns. Mesmo na variação de objetos reais, não podemos reclamar a universalidade sem idealizar a nossa possibilidade de fazer isto: "Posso continuar com esta variação mais e mais". Podemos, portanto, estar otimistas face à nossa afirmação de universalidade e visão *a priori* na Matemática – mas só se conseguirmos mostrar que há, na prova matemática, este elemento de variação e também de antecipação idealizada de uma variação sempre nova.

2.b. *Eidética nas disciplinas materiais da Matemática*

À primeira vista, o método para ver essências parece ser mais apropriado para as regiões materiais do ser, tais como objetos reais, as suas relações no espaço, melodias e cores. Por conseguinte, a primeira linha de argumento na análise da intuição na Matemática conduz ao que Husserl chama as "disciplinas materiais da Matemática". Mais precisamente, conduz a uma certa maneira de compreender algumas disciplinas básicas da Matemática. Estas disciplinas são caracterizadas por propriedades dos objetos, tais como números naturais, linhas, pontos e planos.

Sabemos que Husserl não foi apenas um filósofo da Matemática axiomático-formal. As suas investigações também se referiam às tais "disci-

---

[14] Husserl escreveu: "und so weiter nach Belieben" (Hua IX, 77).

[15] Cf. Hua IX, 79.

plinas materiais matemáticas", nas quais os objetos e conceitos básicos não são completamente substituídos por variáveis algébricas. As disciplinas que ele denomina Matemática Material são, por exemplo, Aritmética elementar e Geometria Euclidiana.[16] Corpo, plano, linha, ponto, ângulo, número ordinal, conjunto, ordem, etc., são objetos básicos irredutíveis da Geometria e da Aritmética Elementar.[17] Concebida como uma disciplina material da Matemática, a Geometria Euclidiana é uma ciência que lida com as estruturas *a priori* do espaço.

O método da variação eidética determina o conceito específico fenomenológico de *a priori* e – mais importante – este não pode ser considerado equivalente ao conceito de *a priori* de Kant.[18] Kant considera conhecimento como sendo *a priori* se puder ser alcançado independentemente de toda a experiência e se for válido antes de toda a experiência.

Por contraste, a variação eidética começa com um objeto de experiência, que depois é arbitrariamente variado na imaginação. Por exemplo, começando com uma pessoa qualquer, podemos variar seu tamanho, seu peso, sua cor, sua postura, podemos apresentar a sua figura de uma determinada maneira, etc. Mas o que somos capazes de identificar em todas estas variáveis é a figura geral do seu corpo num tipo de direito e frontal, "postura normal". Isto significa que, de algum modo, usamos a nossa capacidade para imaginar a figura normal a partir das perspetivas distorcidas que se nos apresentam.

Durante este processo de variação, prestamos atenção às propriedades que permanecem idênticas em todas as variações possíveis, por exemplo, a figura normalizada. Na apreensão dos aspetos idênticos, também estamos orientados para as sínteses de coincidência que ocorrem em todas as variáveis diferentes do mesmo objeto. Desta forma, a variação eidética é um caso de cognição, mesmo que dependa, em grande parte, de atos imaginativos. A experiência eidética depende, portanto, da realidade e das suas configurações específicas. Só teremos experiência do que é idêntico em todas as variantes por meio do atual desempenho desta variação. Só depois saberemos que síntese de coincidência ocorre. O *a priori* fenomenológico é válido para todas as experiências possíveis, mas só conheceremos o conteúdo específico deste *a priori* depois de fazer a variação, e não "de antemão". E isto continua a ser verdadeiro no uso do método eidético na Matemática. Mas há uma diferença importante: o campo de propriedades diferentes nos objetos reais – e que temos de variar – é

---

[16] Cf. Hua XVII, 53, 84,89 e *Ideias* I, Hua III/1, 150 sgs.

[17] Temos de nos lembrar que neste contexto Husserl já pressupõe o tipo de idealização que diferencia o desenho actual no papel do objecto idealizado intencionado por este desenho.

[18] Cf. a nota importante em Hua XVII, 255, nota 1.

muito rico. Em contraste, o grupo de propriedades variáveis, em Matemática, é muito limitado. Para o demonstrar, vou apresentar um exemplo muito simples de uma prova geométrica.

Como podemos ter o conhecimento *a priori*: "quaisquer duas linhas num plano, não paralelas, intersectam-se num ponto"? Neste caso, estamos bastante bem providos com o método da variação. Temos de variar toda uma série de linhas imaginárias, não paralelas. E aqui somos capazes de encontrar, em cada caso imaginado, uma direção que mostra uma aproximação progressiva das duas linhas imaginadas. Podemos, portanto, estar certos que haverá um ponto de intersecção das duas linhas em cada caso possível. E esta visão tem a evidência apodítica que procuramos. Por conseguinte, é válida *a priori* no sentido husserliano.

Outro exemplo: todos os alunos têm de aprender o método, bem conhecido, de bissetar uma linha com a ajuda da construção de dois círculos iguais, à volta das pontas da linha, e uma ligação das duas intersecções destes círculos. O que estamos a fazer nesta prova é a construção e, a cada passo, estamos cuidadosamente orientados para as regras gerais. As regras são:

1. Manter a identidade de cada valor usado para a construção.
2. Não limitar o alcance da construção a um caso especial.
3. Escolher os elementos necessários para a construção de uma forma que seja exequível.

A primeira regra não exige nenhum comentário, por isso vou apenas concentrar-me nas últimas duas.

Ad 3: Mesmo se começarmos a construção ajustando o compasso, podemos perguntar-nos: será que esta construção é possível em todas as linhas? Se estivermos limitados a uma folha de papel de um determinado tamanho, então encontraremos limites arbitrários, mas isto não limita a possibilidade da construção por princípio. Mas podemos escolher um valor demasiado pequeno para o raio dos círculos na nossa primeira tentativa e, por consequência, os dois círculos não se intersectarão. Mas certamente sabemos que podemos simplesmente usar o comprimento da própria linha para ajustar o compasso. Assim, a construção dos dois círculos resultará em duas intersecções que eu posso facilmente ligar a uma nova linha. E, deste modo, posso facilmente provar que as duas partes da linha inicial são iguais em todos os casos possíveis.

Ad 2: De fato, não experimentei todos os valores possíveis para o raio usado na construção dos dois círculos. Tenho de começar com um raio que permita intersecções (ou seja, mais comprido que metade da linha). De fato, estou apenas a usar um valor especial na minha construção, mas isto não limita a minha construção a um caso especial. O processo de construção está orientado para objetos em geral, isto é, neste caso, para linhas em geral, círculos com base em raios de valor em geral, resultando em intersecções e novas linhas em geral, etc. Assim fazendo, tenho de certificar, constante e conscientemente, que cada passo do meu argumento acerca dos triângulos resultantes se mantém válido mesmo se tivesse escolhido um raio diferente. Portanto, há uma espécie de "variação implícita" que diz respeito a apenas o raio dos dois círculos iguais. Não é comparável à variação generalizada de coisas reais em todos os seus aspetos, mas é restrita apenas à extensão do raio – porque estamos a lidar com objetos muito "pobres" em relação a propriedades, já que um círculo é totalmente definido pelo seu centro e raio e, como já tínhamos escolhido o ponto central, só podemos e só temos de variar o raio. Mas não temos de fazer esta variação explicitamente; é suficiente assegurar que em cada passo não está implicada nenhuma limitação da argumentação. Deste modo, temos um círculo singular que representa toda a classe de possíveis variações em relação ao valor do raio: um círculo em geral. E isto permite-nos ganhar conhecimento acerca de fatos gerais de evidência apodítica, mesmo se a nossa construção concreta só está a usar um valor específico para o raio do círculo.

Na teoria de Hume e Berkeley sobre ideias abstratas, podemos encontrar alguns elementos desta solução, que implica uma certa variação, que, apesar de não ser explicitamente exercitada, está, de alguma forma, "na mente". Ambos argumentam contra a ideia de Locke de um "triângulo em geral". Locke tenta defender o conceito que, no que diz respeito a um objeto geométrico como um triangulo, não estamos orientados para um determinado objeto desenhado num papel, que só tem um tamanho, ângulos determinados, etc. Ele propõe que o triangulo geral não tem nenhuma das propriedades que os triângulos podem ter e que, ao mesmo tempo, as tem todas. Isto é um conceito contraditório. No entanto, um conceito como este é atrativo – para nós, como para Berkeley e Hume – porque inclui todas as alternativas que têm de ser consideradas numa prova.

O argumento de Berkeley, no § 16 da Introdução do seu *Tratado acerca dos Princípios do Conhecimento Humano* (citado por Husserl na segunda Investigação Lógica), defende que a prova geométrica usando a ideia de triângulo funciona bem porque, apesar do facto de estarmos a desenhar um determinado triângulo, não usamos as suas propriedades específicas na prova.[19]

[19] "And that because neither the right angle, nor the equality, nor the determinate length of the sides are at all concerned in the demonstration". *A Treatise Concerning the Principles of Human Knowledge*, em: *The Works of George Berkeley*, vol. 1, ed. By A. C. Fraser. Oxford 1901. Introduction, § 16.

Hume procura fazer uso das intuições de Locke da mesma forma que Berkeley. Ele adota a ideia da representação de Berkeley no seu nominalismo. Hume considera as ideias abstratas como sendo elas próprias individuais, mas simultaneamente gerais em relação ao que representam. Devido a uma tal função representativa, uma única palavra evoca uma única ideia, mas também suscita a tendência para imaginar outras ideias singulares, que são alternativas de objetos subordinados sob um determinado conceito. Por exemplo, se usarmos a palavra "triângulo" numa tentativa de provar a proposição que "todos os ângulos de um triângulo são iguais", mais vale começarmos com um triângulo equilátero.[20] Mas, depois, surgem outras ideias de triângulos, por exemplo, triângulos que não são nem equiláteros nem retângulos, e isto leva-nos à conclusão que a proposição proposta é falsa. Aqui, o elemento de variação implícita está presente de uma forma muito clara.

Berkeley e Hume mencionam esta tendência escondida para a variação só no caso de provas matemáticas. Ignorando a crítica de Husserl da teoria empirista da abstração, há, na minha opinião, uma ligação importante entre o elemento da teoria empirista da prova matemática mencionada acima e o método eidético husserliano, interpretado como uma teoria de provas matemáticas.

A partir das nossas considerações de variação implícita em Geometria – que também podem ser aplicadas na Aritmética –, concluímos que há boas razões para defender evidência apodítica na Matemática material. Mas também nos apercebemos imediatamente da dificuldade da defesa de conhecimento matemático num contexto puramente formal. Na Matemática formal, só nos referimos aos objetos em geral, que normalmente seguem as regras de operações definidas. A questão é: estaremos mesmo a fazer uso da variação eidética nestes contextos formais?

2.c. *Eidética em contextos axiomático-formais*

Em contextos formais, começamos com um conjunto de elementos e operações possíveis com eles e pressupomos que são regrados por um conjunto de axiomas. Se considerarmos números naturais, então começamos com os axiomas de Peano em relação aos números naturais incluindo o axioma de indução completa. Desta forma, podemos facilmente começar com a prova de proposições simples.

---

[20] Cf. David Hume, *A Treatise of Human Nature*. Ed. L. A. Selby-Bigge. Oxford, 1888, Book I, Part I, Sec.7.

A forma heurística de encontrar tais proposições pode usar o nosso conhecimento sobre números, tal como já os conhecemos a partir do domínio material da Matemática. Podemos criá-los e tê-los dados intuitivamente ao contar, e assim já sabemos que $2^2 \geq 2$, $3^2 \geq 3$, $4^2 \geq 4$, e assim por diante. Por isso podemos suspeitar que $n^2 \geq n$ é verdade para todos os números naturais, mas se quisermos provar que é esse o caso, temos de usar o método da indução completa.

Proposição: Para todos $n \in N$ é verdade: $n^2 \geq n$

Prova: Começamos com indução completa:

(1) A proposição é verdadeira para $n = 1$, é verdade que $1^2 = 1 \geq 1$

(2) Agora fazemos o passo de n para $n + 1$

(3) Que $n_o \in N$ seja qualquer elemento de N, então assumo que $n_o^2 \geq n_o$

(4) Agora investigamos o valor de $(n_o + 1)^2$

A pergunta é: É verdadeiro que $(n_o + 1)^2 \geq n_o + 1$?

(5) A multiplicação do primeiro termo dá-nos:

$$(n_o + 1)^2 = n_o^2 + 2n_o + 1^2$$

(6) Por causa da suposição (3), é verdade que $n_o^2 \geq n_o$, agora (7) segue-se de (5) e (3), em conjunto com o lema mais trivial (6a):

Lema[21] (6a): para todos a, b, c, d, $\in N$ é verdade que

Se $a = b$ e $c \geq d => a + c \geq b + d$

(7) $(n_o + 1)^2 = n_o^2 + 2n_o + 1^2 \geq n_o + 2n_o + 1 = 3n_o + 1$

(Conseguimos isto pela inserção de (3) em (5) e o uso de (6a), a última equação resulta por cálculo)

(8) Agora falta mostrar que $3\,n_o + 1 \geq n_o + 1$ é verdadeiro

(9) Para demonstrar que (8) é verdadeiro em todos os casos com um número natural, usando (6a), é suficiente mostrar a validade do seguinte

Lema[22] (9a): Para todos $n \in N$ é verdade que $3\,n \geq n$

(10) De (7) e (8) segue-se que $(n_o + 1)^2 \geq n_o + 1$ é verdadeiro.

---

[21] sto tem de ser provado com base nos axiomas de Peano, cf. E. Landau, *Grundlagen der Analysis*, Kap. 1. Leipzig, 1930.

[22] Isto também pode ser provado por indução completa.

Isto é apenas um exemplo muito simples para caracterizar provas axiomáticas. Talvez este nem seja a forma mais fácil ou mais elegante para provar a proposição, mas compreendemos bastante bem como os passos singulares estão ligados. Nesta prova há tipos diferentes de passos argumentativos: Alguns dos passos apenas expressam proposições já provadas verdadeiras, ou aceites como suposições como (3), ou dão uma explicação acerca do próximo passo, como (4). A conclusão (10) apenas declara que a prova por indução completa foi resolvida. Em alguns dos passos, fazem-se apenas operações como em (5) ou (7). Alguns dos passos informam-nos acerca dos Lemas que usamos e que temos de provar separadamente (6a) e (9a). Alguns passos incorporam conclusões lógicas seguindo o *modus ponens*, como a conclusão que leva de (3), (5) e (6a) até (7). Mas nem todas as provas são executadas usando só regras lógicas. Por exemplo, não podemos interpretar a execução de indução completa como uma regra lógica.

A prova inteira pode ser interpretada como uma argumentação com base nos axiomas pressupostos, nas operações, e no uso de regras lógicas. Mas, à primeira vista, parece não haver espaço para a variação. O único sinal deste método básico é a suposição generalizada sobre o $n \in N$ ser escolhido arbitrariamente e permanecendo, portanto, objeto de uma "variação implícita" com o seguinte sentido: pode ser extraído qualquer n de N. E para garantir isto, temos de observar cuidadosa e conscientemente que esta condição não é violada durante toda a prova. Esta variação implícita não é feita explicitamente, como foi o caso com os objetos reais, que são variados explicitamente nos vários aspetos da sua aparência (por exemplo, numa pessoa, o seu tamanho, peso, cor, forma, etc.). Na Matemática, os objetos só têm algumas propriedades que podemos considerar variáveis, por exemplo, nos números naturais só o seu valor (talvez também propriedades dos números, tais como serem primos ou não). Podemos apenas variar a argumentação na extensão de todos os n possíveis de N e este é exatamente o processo do método eidético. A expressão desta variação implícita é a regra para ter cuidado constante e conscientemente para não assumir suposições adicionais que limitem a generalidade de n.

O que ganhamos ao usar um valor de n que se estende por todos os números naturais é uma proposição que não depende do valor escolhido arbitrariamente de n. Desta forma podemos sumariar: até em contextos formais a evidência da prova assenta numa variação implícita e adquire a sua evidência apodítica especial a partir desta origem.

ABSTRACT

In this paper, the author presents Husserl's method of eidetic variation. He starts with an analysis of how the method works in the case of empirical types corresponding to objects of everyday life, and he stress the results of its application, namely the gathering of a priori, apodictic knowledge about essences. The author examines the way this method can be applied to what Husserl called the material mathematics, for instance, Euclidean geometry. Finally, he addresses the main question regarding the possibility of using eidetic variation, and eidetic intuition, in formal mathematics. Analysing one example of a formal proof, he concludes that eideitic variation procedures are still at work in this realm. Precisely in the "implicit variation" that allows the mathematician to reason about any number whatsoever when developing is formal proofs, for instance, about any concrete natural number, when proving a theorem about N.